

Campo elettrico sull'asse di simmetria di un disco carico omogeneamente

Applicazione del calcolo integrale

Problema

Determinare il campo elettrico creato dalla carica presente su un disco di raggio R nei punti dell'asse di simmetria del disco perpendicolare al piano del disco stesso. Nell'ipotesi che il disco sia uniformemente carico, esprimere l'intensità del campo elettrico generato in funzione della densità superficiale di carica, del raggio R del disco e della distanza d dei punti dell'asse dal piano del disco.

Soluzione

Nelle elaborazioni che seguono si suppone che il sistema elettrostatico sia immerso nel vuoto.

Calcolo dell'intensità del campo elettrico

Facciamo riferimento alla figura riportata a margine.

Il campo elettrico generato dalla carica presente sul disco nei punti dell'asse del disco, per motivi di simmetria geometrica della configurazione, ha la stessa direzione dell'asse di simmetria del disco, con verso uscente dal piano del disco. Sia B il punto dell'asse di simmetria del disco a distanza d dal centro O in cui vogliamo determinare il campo elettrico.

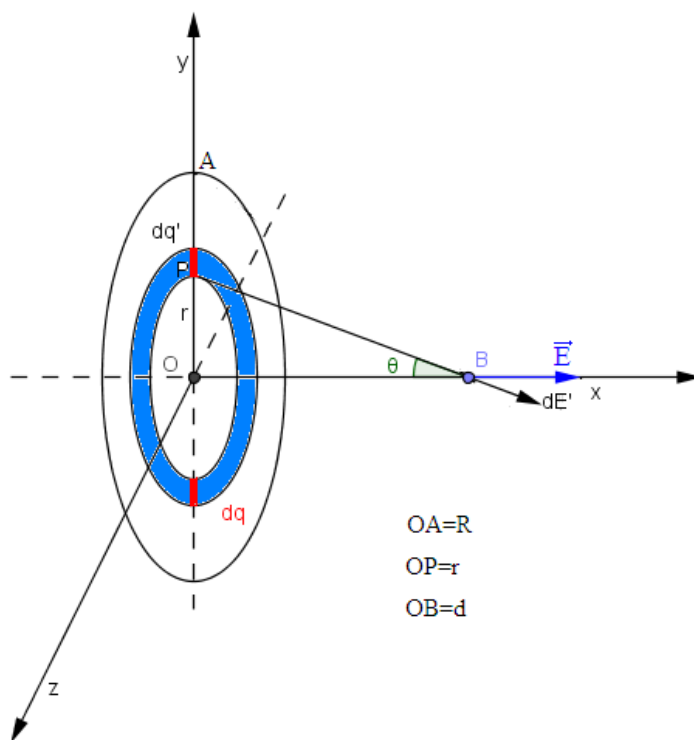
Per descrivere la situazione fisica fissiamo nello spazio il sistema di riferimento cartesiano $Oxyz$, con il piano coordinato Oyz coincidente con il piano del disco, l'origine O coincidente con il centro del disco e l'asse x , coincidente con l'asse di simmetria del disco, abbia il

verso positivo diretto da O al punto B . Poniamo $\overline{OA} = R$, $d = \overline{OB}$.

Per calcolare l'intensità del campo elettrico in B consideriamo la carica dq contenuta in una **corona circolare** di entro O e raggio r , con $0 < r \leq R$, e larghezza dr .

Sull'asse y consideriamo il punto P tale che $\overline{OP} = r$; OP è il raggio interno della corona circolare indicata prima.

Osserviamo che in corrispondenza di un elemento ds di superficie della corona circolare nelle immediate vicinanze di P , in cui sia contenuta la carica elementare dq' , possiamo considerare la regione piana ds' della stessa corona, simmetrica di ds rispetto al centro O del disco (in figura le regioni ds e ds' sono evidenziate in colore rosso). Le regioni ds , ds' , per la supposta distribuzione uniforme della carica sul disco, contengono la stessa quantità di carica dq' e queste creano in B un campo elettrico per il quale direzione e verso sono quelli dell'asse x (in figura è rappresentato solo il vettore campo elettrico generato dalla carica contenuta in ds ed è indicato con $d\vec{E}'$). Per ottenere il campo elettrico complessivo $\vec{dE}$ creato dalla carica dq si possono immaginare tante coppie di



superfici elementari, composte da elementi di superficie simmetrici rispetto al centro O del disco, che descrivono la corona circolare in oggetto ed osservare che i campi elettrici creati in B dalle cariche contenute in dette coppie di superfici, se proiettati ortogonalmente sul piano per B perpendicolare all'asse x, risultano avere componenti vettoriali opposte. Pertanto, il campo elettrico complessivo $\vec{dE}$ creato dalla carica dq contenuta nella corona circolare ha solo componente cartesiana lungo l'asse x ed il suo modulo coincide con la componente cartesiana scalare $\vec{dE}_x$. Per esprimere il modulo di $\vec{dE}$, indichiamo con θ l'ampiezza dell'angolo acuto che il segmento PB forma con la direzione dell'asse x e osserviamo che

$$|\vec{dE}| = \vec{dE}_x = k \frac{dq}{BP^2} \cos \theta, \text{ essendo } k \text{ la costante di Coulomb.}$$

Applicazione del calcolo integrale per trovare il campo $\vec{E}$ in P creato da tutta la carica del disco.

La quantità di carica dq contenuta nella superficie della corona circolare di raggio r vale $dq = 2\pi r \cdot dr \cdot \sigma = 2\pi r \sigma dr$, per cui si ha

$$\vec{dE}_x = k \frac{dq}{BP^2} \cos \theta = k \frac{2\pi r \sigma dr}{BP^2} \cos \theta.$$

D'altra parte, con $d = \overline{OB}$ e $\overline{OP} = r$, si ha anche $\overline{BP}^2 = r^2 + d^2$ e $\cos \theta = \frac{\overline{OB}}{\overline{PB}} = \frac{d}{\sqrt{r^2 + d^2}}$, quindi

$$\vec{dE}_x = k \frac{2\pi r \sigma dr}{r^2 + d^2} \cdot \frac{d}{\sqrt{r^2 + d^2}} = k \frac{2\pi d \cdot \sigma r \cdot dr}{(r^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Il valore del modulo del campo elettrico complessivo generato dalla carica del disco nel punto B si ottiene sommando tutti i contributi forniti al campo stesso dalla carica presente in ciascuna delle corone circolari aventi centro in O la cui unione ricopre l'intero disco. Analiticamente si ottiene l'intensità del campo elettrico calcolando il seguente integrale definito:

$$E_B = \int_{r=0}^R \vec{dE}_x = \int_{r=0}^R k \frac{2\pi d \cdot \sigma r \cdot dr}{(r^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} = k \cdot \pi \sigma d \int_{r=0}^R 2r (r^2 + d^2)^{-\frac{3}{2}} dr = k \cdot \pi \sigma d \left[\frac{r^2 + d^2^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} \right]_0^R =$$

$$2k \cdot \pi \sigma d \left[\frac{1}{d} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + d^2}} \right] = 2k \cdot \pi \sigma \cdot \frac{\sqrt{R^2 + d^2} - d}{\sqrt{R^2 + d^2}}$$

Valore del campo nei punti dell'asse prossimi al disco

Studiando il limite per $d \rightarrow 0$ dell'espressione trovata si determina il valore del campo elettrico nei punti dell'asse prossimi al disco. Si ha:

$$\lim_{d \rightarrow 0} E_B(d) = \lim_{d \rightarrow 0} 2k \cdot \pi \sigma \cdot \frac{\sqrt{R^2 + d^2} - d}{\sqrt{R^2 + d^2}} = 2k \cdot \pi \sigma = \frac{2\pi \sigma}{4\pi \epsilon_0} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Facciamo presente che il valore ottenuto coincide con il valore del campo elettrico creato nello spazio da una superficie piana infinita caricata uniformemente con densità di carica σ .